

Megint a kúptetőről

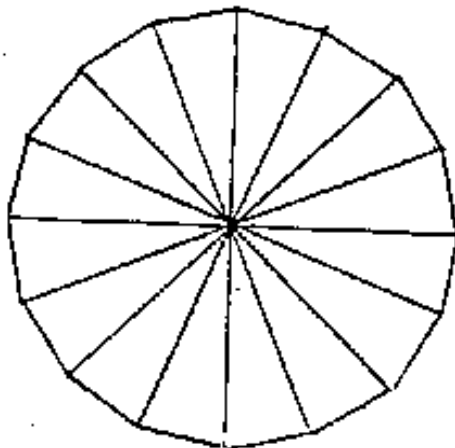
A kúptető geometriailag egyenes körkúp felület, illetve az általa határolt test – 1. ábra.



1. ábra – forrása:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2c/Muenster%2CGermany%2CBudde%20nturm21.JPG>

Gyakran nem kör, hanem szabályos sokszög alaprajzzal készítik – 2. ábra.

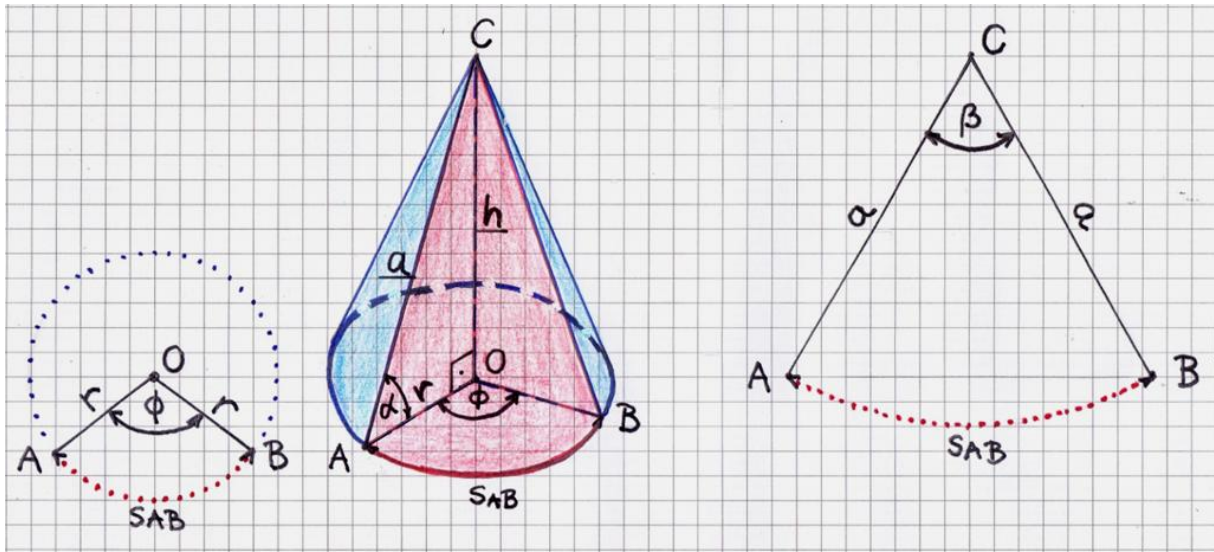


2. ábra – forrása:

<https://www.lehrer.uni-karlsruhe.de/~za242/osa/Archiv/moffenka/Image231.gif>

Vagyis ekkor valójában egy szabályos sokszög alapú egyenes gúla készül, ami már majd - nem kúpnak látszik, ha a sokszög n oldalszáma elég nagy; pl. a 2. ábrán $n = 16$.

Nem ritka, hogy a kúp nem teljes, hanem csak egy – a teljes körből kivágott körcikknek megfelelő – *kúpgerezd* $\rightarrow$ 3. ábra. Az alábbiakban ezzel foglalkozunk.



3. ábra

Látjuk, hogy ez egy olyan test, amelyet a teljes egyenes körkúpból két, a kúp tengelyét tartalmazó félsík metsz ki. Minthogy a teljes kúpból így két test áll elő, ezért ezeket valahogyan meg kell egymástól különböztetni; pl.: a leíráshoz alkalmazott paraméterek értékeinek megadásával. A továbbiakban ez nem okoz gondot.

Most levezetjük gyakorlati számításokra is alkalmas képleteinket.

A 3. ábra bal oldali ábrarészéről az **AB** körív hossza:

$$s_{AB} = r \cdot \phi ; \quad (1)$$

ugyanaz a 3. ábra jobb oldali ábrarészéről, mely a görbe palástfelület síkba terítését mutatja:

$$s_{AB} = a \cdot \beta . \quad (2)$$

Most (1) és (2) szerint:

$$r \cdot \phi = a \cdot \beta \rightarrow \beta = \phi \cdot \frac{r}{a} . \quad (3)$$

A 3. ábra középső részéről leolvashatóan:

$$\frac{r}{a} = \cos \alpha , \quad (4)$$

így (3) és (4) szerint:

$$\underline{\beta = \phi \cdot \cos \alpha .} \quad (5)$$

Ezután kiszámítjuk a görbe palástfelület - rész felszínét, kétféleképpen is.

Először:

$$A = T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot s_{AB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a \cdot \beta) = \frac{a^2 \cdot \beta}{2} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\phi \cdot \frac{r}{a} \right) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r \cdot \phi ; \quad (6)$$

figyelembe véve, hogy

$$a = \frac{r}{\cos \alpha} , \quad (7)$$

(6) és (7) - tel:

$$\underline{\underline{A(r, \alpha, \phi) = \frac{r^2 \cdot \phi}{2 \cdot \cos \alpha} .}} \quad (8)$$

Másodszor:

$$A = \frac{T_{vet}}{\cos \alpha} ; \quad (9)$$

egyenes arányossággal – gyakorlásképpen – :

$$\frac{T_{vet}}{T_{kör}} = \frac{\phi}{2 \cdot \pi} \rightarrow T_{vet} = \frac{\phi}{2 \cdot \pi} \cdot T_{kör} = \frac{\phi}{2 \cdot \pi} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{r^2 \cdot \phi}{2} ; \quad (10)$$

most (9) és (10) - zel:

$$A = \frac{r^2 \cdot \phi}{2 \cdot \cos \alpha} , \quad (8 / 1)$$

(8) - cal egyezésben.

Könnyen kiszámíthatjuk a kúpgerend - test V térfogatát is; ismét egyenes arányossággal:

$$\frac{V}{V_{teljes}} = \frac{\phi}{2 \cdot \pi} \rightarrow V = \frac{\phi}{2 \cdot \pi} \cdot V_{teljes} . \quad (9)$$

Ámde:

$$V_{teljes} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{h}{3} , \quad (10)$$

így (9) és (10) - zel:

$$V = \frac{\phi}{2 \cdot \pi} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{6} \cdot r^2 \cdot \phi ,$$

tehát:

$$V = \frac{1}{6} \cdot r^2 \cdot \phi \cdot h. \quad (11)$$

Nem felejtjük el, hogy *Pitagorász* tételével a kúpalkotó hosszára:

$$\underline{a = \sqrt{r^2 + h^2}}, \quad (12)$$

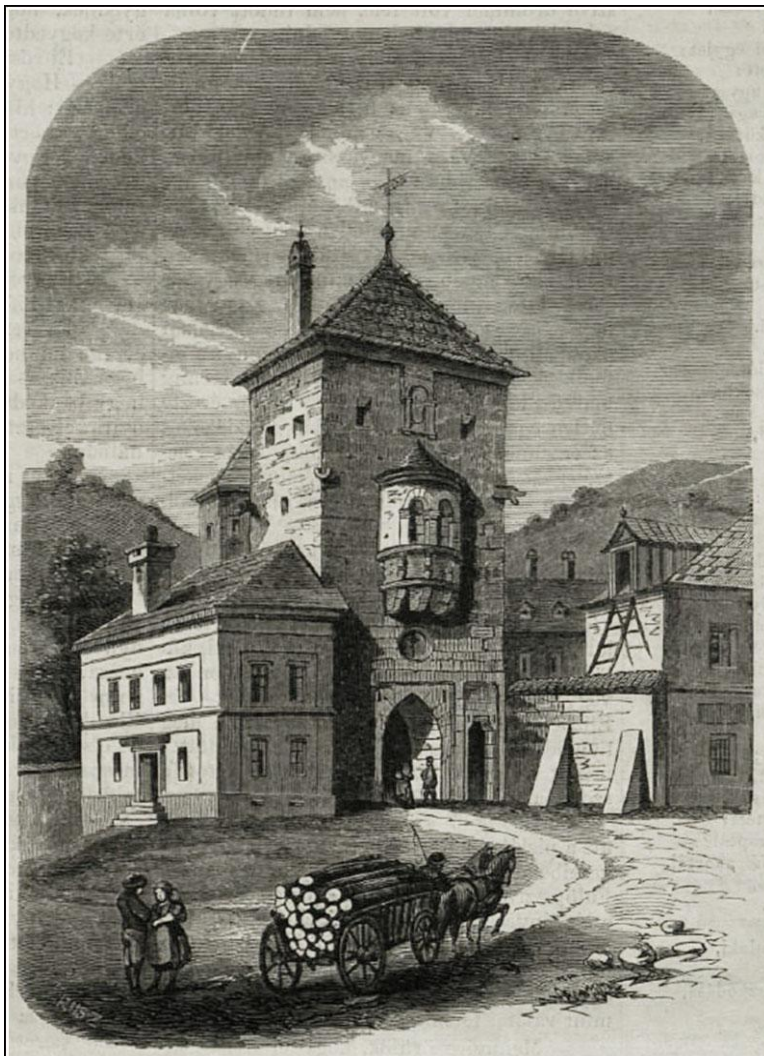
valamint *tangens* szögfüggvénnyel a kúpalkotó hajlására:

$$\underline{\text{tg } \alpha = \frac{h}{r} \rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{h}{r}\right)}. \quad (13)$$

Most (11) és (13 / 1) - gyel:

$$\underline{\underline{V(r, \alpha, \phi) = \frac{1}{6} \cdot r^3 \cdot \text{tg } \alpha \cdot \phi}}. \quad (14)$$

A 4. ábra rajzán az erkélyt félkör alaprajzú kúptető védí; erre: $\phi = \pi$.



4. ábra – forrása:

http://www.berszangabor.hu/a-human/05-hum/h14-23_elemei/xx1282.jpg

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
mérnöktanár

Szódliget, 2017. 05. 29.